# Лекция. Фазовый объем

# *Фазовый объем линейной нестационарной системы. Теорема об изменении фазового объема. Роль следа матрицы линейной системы.*

Исключительно важной характеристикой, описывающей временную эволюцию линейной нестационарной системы является, так называемый, фазовый объем, равный модулю определителя фундаментальной матрицы ее решений.

Рассмотрим систему уравнений собственного движения линейной нестационарной машины

 (7.1)

Фундаментальная матрица решений системы (7.1) удовлетворяет матричному уравнению

 (7.2)

с начальным условием

 (7.3)

Как изменяется во времени числовая функция, равная определителю матрицы **N**(t)?

Рассмотрим сначала систему с постоянными коэффициентами

 (7.4)

В этом случае

 (7.5)

Следовательно,

 (7.6)

Для любой невырожденной матрицы **S**

 (7.7)

Имеет место следующая теорема Шура, играющая важную роль в вычислительной линейной алгебре

Всякую матрицу A c помощью обвертывающего преобразования подобия можно привести к треугольному виду

 (7.8)

Треугольная матрица , называемая формой Шура матрицы **A**, содержит на диагонали ее собственные значения .

Форма Шура определена неоднозначно. Прежде всего она может быть выбрана верхней треугольной  или нижней треугольной  матрицей (верхней или нижней формой Шура). Кроме того, для любого заданного порядка расположения собственнх значений найдется форма Шура, на диагонали которой числа  расположены в нужной последовательности.

Из теоремы Шура следует, что можно найти матрицу **S** такую, что

 (7.9)

Здесь Tr **A** обозначает след (сумму диагональных элементов) матрицы **A**.

Итак, поскольку

 (7.10)

получаем формулу для вычисления фазового объема системы (7.10) с постоянными коэффициентами

 (7.11)

Рост, сохранение или убываниe фазового объема системы с постоянными коэффициентами зависит от знака следа Tr **A** матрицы **A**.

Рассмотрим теперь систему с переменными коэффициентами (7.1).

Для фундаментальной матрицы решений этой системы справедливо соотношение

 (7.12)

Следовательно, имеет место приближенное равенство

 (7.13)

Или

 (7.14)

Таким образом

 (7.15)

Вычисляя определитель матриц, стоящих в левой и в правой частях выражения (7.15), имеем

 (7.16)

Следовательно,

 (7.17)

Таким образом получаем формулу для вычисления фазового объема нестационарной системы (7.1)

 (7.18)

## *Системы уравнений с периодическими коэффициентами. Матрица монодромии. Отображение Пуанкаре. Характеристические показатели. Мультипликаторы.*

## 

Предположим, что матрица системы имеет элементы, периодически изменяющиеся во времени,

A(t) = A(t+T) (7.19)

Теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами помогает решить задачу управления шагающим аппаратом, задачу стабилизации перевернутого маятника, объясняет эффект раскачивания качелей и так далее.

Если матрица **Z**(t) является фундаментальной матрицей системы (7.1) при условии (7.19), то матрица **Z**(t+T) также фундаментальна, поскольку

 (7.20)

И в этом случае

 (7.21)

Здесь **С** - постоянная матрица с отличным от нуля определителем.

Заметим, что, если , то

 (7.22)

Наблюдая фундаментальную матрицу системы “с помощью стробоскопа” только в моменты времени t=0,T,2T,...,nT,..., можно полностью охарактеризовать решение. Последовательность точек  носит название “монодромия”. Матрица **C**, характеризующая движение фазовой точки вдоль монодромии, называется матрицей монодромии. Движение фазовой точки вдоль монодромии называют отображением Пуанкаре.

Поскольку, в соответствии с соотношением (7.22) , матрицу монодромии можно искать с помощью компъютера, решая исходную систему уравнений на одном периоде T матрицы системы **A**(t).

В соответствии с теоремой Флоке о представлении фундаментальной матрицы системы уравнений с периодическими коэффициентами фундаментальная матрица решений линейной системы (7.1) с непрерывной периодической матрицей периода Т всегда может быть представлена в виде

 (7.23)

Здесь **P**(t) непрерывно дифференцируемая периодическая матрица с периодом T, **P**(0)=**E**, **В** - постоянная матрица,

 (7.24)

В соответствии с теоремами Еругина и Ляпунова система (7.1) с периодическими коэффициентами приводима к системе с постоянными коэффициентами с матрицей **В**

 (7.25)

Корни  характеристического уравнения системы с постоянными коэффициентами (7.25) называются характеристическими показателями системы (7.1) с периодическими коэффициентами.

Можно также выписать характеристическое уравнение для матрицы монодромии **C**. Корни этого уравнения  называются мультипликаторами исходной системы.

## *Нормальные решения системы с периодическими коэффициентами. Связь характеристических показателей и мультипликаторов.*

Любому мультипликатору  отвечает хотя бы одно решение системы (7.1) такое, что

**z**(t+T) = **z**(t) (7.26)

Это решение (оно называется нормальным) можно построить следующим образом. Возьмем в качестве начального условия для **z**(t) собственный вектор  матрицы **C**, соответствующий мультипликатору 

 (7.27)

Тогда

 (7.28)

Здесь **N**(t)- фундаментальная матрица системы.

 (7.29)

Справедливо и обратное утверждение.

Если , то q - мультипликатор.

Действительно.

 (7.30)

Следовательно,

 (7.31)

Таким образом - собственный вектор матрицы , q - соответствующий ему мультипликатор.

Характеристические показатели и мультипликаторы связаны между собой соотношением

 (7.32)

Здесь ,вообще говоря, комплексные числа.

Следовательно,

 (7.33)